



INFOMAT

Mars 2009

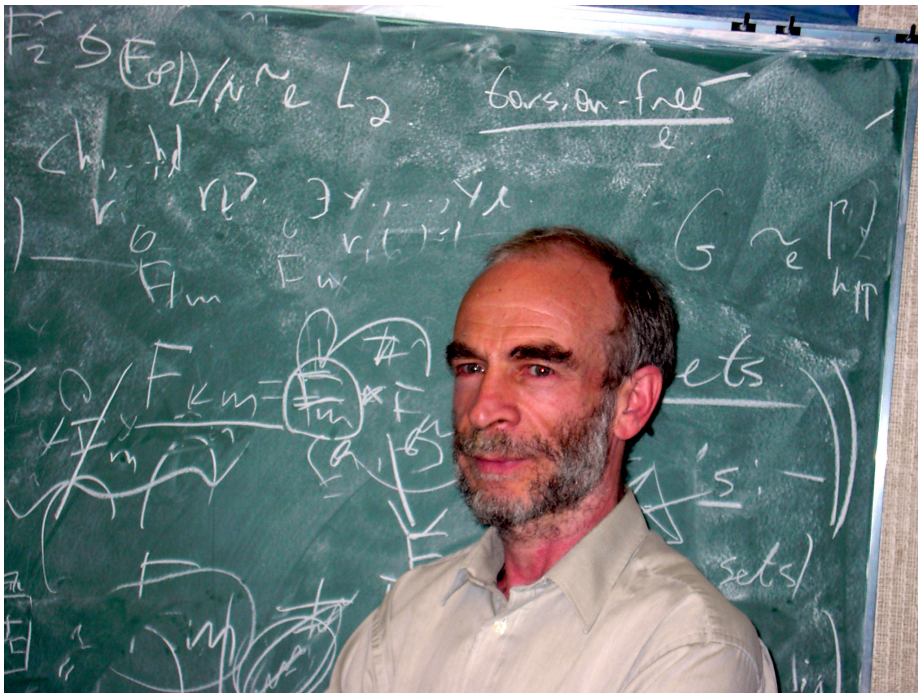
Kjære leser!

Årets Abelpris, den sjuende i rekken, går til den russisk-franske matematikeren Mikhail Gromov. Blant mange gode kandidater falt valget på en differensialgeometer fra St. Petersburg. Gromov er professor ved IHÉS i Paris og har et godt navn i det matematiske miljøet, men er også kjent for teoretiske fysikere, ikke minst for Gromov-Witten-invariantene.

I dette spesialnummeret av INFOMAT gir vi en utførlig presentasjon av prisvinneren, hans arbeider og også en litt popularisert framstilling av fagområdene hvor han har bidratt.

Midt i mars ble den finalen i Abelkonkurransen avviklet i Trondheim. INFOMAT hilser til alle finaledeltakerne og håper at konkurransen kan være en inspirasjon for dem og alle andre skoleelever til å jobbe hardt med sin matematikk. En dag er det kanskje noen av dem som får de 6 millionene av Kongen!

hilsen Arne B.



ABELPRISEN FOR 2009 ER TILDELT MIKHAIL L. GROMOV, IHÉS.

Det norske Videnskaps-akademi har besluttet å tildele Abelprisen for 2009 til Mikhail Leonidovich Gromov, IHÉS, Bures-sur-Yvette, Frankrike, for hans revolusjonerende bidrag til geometri. Den russisk-franske matematikeren Mikhail L. Gromov er en av vår tids mest betydningsfulle matematikere. Han er kjent for å ha gitt viktige bidrag til flere matematiske områder, dog spesielt geometri. Gjennom de siste 30 år har Gromov bidratt med dype og originale ideer av stor generalitet. Ideer som har gitt oss helt nye perspektiver på geometri og andre områder av matematikk.

INFOMAT kommer ut med 11 nummer i året og gis ut av Norsk Matematisk Forening. Deadline for neste utgave er alltid den 10. i neste måned. Stoff til INFOMAT sendes til

infomat at math.ntnu.no

Foreningen har hjemmeside <http://www.matematikkforeningen.no/INFOMAT>

Ansvarlig redaktør er Arne B. Sletsjøe, Universitetet i Oslo.

ARRANGEMENTER

Matematisk kalender

Mars:

26. Abelprisen 2009, offentliggjøring, Oslo

Mai:

4.-10. 4th General conference on advanced mathematical methods in finance, Ålesund

19.-20. Abelprisutdeling, Oslo

Juni:

1.-4. Abelsymposiet, Combinatorial aspects of commutative algebra and algebraic geometry, Voss

8.-11. Britisk-Nordisk Matematikerkonf., Oslo

15.-17. Marine 2009: 3rd Int. Conf. on Computational Methods In Marine Engineering, Trondheim

22.-26. International conference on spectral and higher order methods, Trondheim

August:

10.-14. Homological and geometric methods in algebra, Trondheim

Oktober:

12.-17. An international Conference on Stochastic Analysis and Applications, Hammamet, Tunisia

WORKSHOP ON NUMERICAL ASPECTS OF NONLINEAR PDES OF HYPERBOLIC TYPE, Oslo, 26.-27. mai 2009

The workshop is part of the basic research program Nonlinear Partial Differential Equations at the Centre for Advanced Study at the Norwegian Academy of Science and Letters for the academic year 2008-09.

Speakers:

Frédéric Coquel, Bruno Després, Volker Elling, James Glimm, Espen Jakobsen, Dietmar Kröner, Peter A. Markowich, Roberto Natalini, Andreas Prohl, Anders Szepessy, Eitan Tadmor, Anna-Karin Tornberg, Manuel Torrilhon, Gerald Warnecke, Petra Wittbold

4TH GENERAL CONFERENCE ON ADVANCED MATHEMATICAL METHODS IN FINANCE

Ålesund, 4.-10. mai 2009

Plenary Speakers:

Fred Espen Benth (Oslo), **Damiano Brigo** (UK),

Vasile Brianzanesu (Romania), **Umut Çetin** (UK), **Ernst Eberlein**, (Tyskland), **Lane Hughston** (UK), **Claudia Klueppelberg**, (Tyskland), **Damien Lambertson** (Frankrike), **Tom Lindstrøm** (Oslo), **George C. Papanicolaou** (USA), **Goran Peskir** (UK), **Eckhard Platen** (Australia), **Marie-Claire Quenez Kammerer** (Frankrike), **Walter Schachermayer** (Australia), **Uwe Schmock** (Østerrike), **Christoph Schwab** (Sveits), **Halil Mete Soner** (Tyrkia), **Peter Spreij** (Nederland), **Lukasz Stettner** (Polen), **Johan Tysk** (Sverige), **Esko Valkeila** (Finland), **Michèle Vanmaele** (Belgia), **Thaleia Zari-phopoulou** (USA), **Xunyu Zhou** (UK),

Frist for registrering, **15. mars 2009.**

Organisasjonskomité:

Giulia Di Nunno, Helge Galdal, Bernt Øksendal, Yeliz Yolcu Okur (alle Oslo)

ABELSYMPOSIET 2009

Voss, 1.-4. juni 2009

Combinatorial aspects of commutative algebra and algebraic geometry

Foredragsholdere:

Aaron Bertram, Mats Boij, Anders Buch, Aldo Conca, David Eisenbud, Sergey Fomin, William Fulton, Jürgen Herzog, Joel Kamnitzer, Dan Laksov, Diane MacLagan, Ezra Miller, Sam Payne, Irena Peeva, Frank-Olaf Schreyer, Jessica Sidman, Mike Stillman, Rekha Thomas, Ravi Vakil, Jerzy Weyman, Andrei Zelevinsky



BRITISK-NORDISKE MATEMATIKERKONGRESS

Oslo, 8.-11. juni 2009

Plenumsforelesere:

Mikael Rørdam, (Operator algebras), **Ib Madsen**, (Algebraic topology and K-theory), **Erkki Somersalo**, ("Mathematics and the brain"), **Niels Peter Jørgensen**, (Homological algebra), **Martin Bridson**, (Geometric group theory), **Dominic Joyce**, (Differential geometry), **Nils Henrik Risebro** (Differential equations), **Olle Häggström**, (Probability), **Frances Kirwan** (Algebraic geometry), **Hermann Thorisson** (Probability theory) **Carsten Thomassen**, (Graph theory)

MARINE 2009: III INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS IN MARINE ENGINEERING

Trondheim 15.-17. juni 2009

Mer informasjon på <http://congress.cimne.com/marine09/frontal/default.asp>

INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPECTRAL AND HIGH ORDER METHODS

Trondheim, 22.-26. juni 2009

Mer informasjon på
<http://www.math.ntnu.no/icosahom/>

HOMOLOGICAL AND GEOMETRIC METHODS IN ALGEBRA,

Trondheim 10.-14. august 2009

Mer informasjon på
<http://www.math.ntnu.no/mat/alg/ConfHGMA/>

Nye doktorgrader

Inga Baadshaug Eide disputerte for Ph.D-graden 20. mars 2009. Tittel på avhandlingen er "*Small probabilities, large markets and asymmetric information*".



Fra instituttene

Gjester:

Martin Herrschend er gjest hos professor Idun Reiten (algebragruppen) i mars.

Mahmood Shabankhah er gjest hos professor Kristian Seip (analysegruppen).

 NTNU

Marius Overholt har forskningstermin og skal oppholde seg ett år i Trondheim 2009-2010.



ABELSTIPEND I SPANIA

Universidad Computense De Madrid, Spania utlyser stipend i matematikk og relaterte områder for senior forskere, post doc kandidater og doktorgradsstudenter til utveksling og samarbeid mellom spanske og norske forskningsmiljøer. Stipendiene er for 3-12 måneder. Søknadsfrist **23.mai 2009**.

Fullstendig utlysning og søknadspapirer finnes hos redaksjonen.

NMF UTLYSER ABELSTIPEND

Søknadsfristen for Abelstipend for 2010 er **15. april 2009**. Stipendientildeles masterstudenter i matematiske fag, og retningslinjer for søknader fins på lenken: <http://matematikkforeningen.no/abelstipend/>

ABELKONKURRANSEN



Niels Henrik Abels matematikkonkurranse

2008–2009. *Resultater*

Finale 12. mars 2009

Det ble gitt maksimalt 10 poeng for hver oppgave.

Navn	Skole, klasse	Oppgave				Sum
		1	2	3	4	
1 Andrés Gómez Emilsson	Red Cross N. U. W. College (Flekke), ib2	10	10	6	5	31
2 Sondre Kvamme	Fana gymnas (Bergen), 3e	10	10	4	5	29
3 Felix T. Prinz	Sunnhordland folkehøgskule (Halsnøy), teater	10	4	5	8	27
4 Jarle Stavnes	Kristiansand katedralskole Gimle, 3stb	10	5	5	5	25
4 Ailo Aasen	Sandnessjøen vgs, ss3b	10	5	5	5	25
6 Sivert Bocianowski	Ski vgs, 3stc	10	1	5	5	21
7 Karl Erik Holter	Stabekk vgs, 1stb	10	5	2	1	18
7 Gaute Linga	Fana gymnas (Bergen), 3f	10	1	2	5	18
9 Georg Alexander Bugge	Oslo katedralskole, 3e	9	1	2	5	17
9 Bernt Ivar Nødland	Sandnes vgs, 2d	10	2	5	0	17
11 Tony Valle	Hammerfest vgs, 2stub	10	0	5	0	15
12 Skjalg Bjørkevoll	Sandsli vgs (Bergen), 3d	9	0	5	0	14
12 Hai Do Son	Red Cross N. U. W. College (Flekke), ib1	4	0	5	5	14

ABELPRISEN 2009

ABELKOMITEENS BEGRUNNELSE

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet at Abelprisen for 2009 tildeles

Mikhail Leonidovich Gromov

for hans revolusjonerende bidrag til geometrien.

Geometri er et av matematikkens eldste områder. Dette feltet har gjennom århundrene vært gjenstand for store matematikeres oppmerksomhet, men har i løpet av de siste 50 år gjennomgått revolusjonerende forandringer. Mikhail Gromov har stått i spissen for noen av de viktigste landevinningene; han har utviklet dype og usedvanlig originale ideer som har ledet til nye perspektiver på geometri så vel som på andre deler av matematikken.

Riemannsk geometri vokste ut av studiet av krumme flater og deres høyere-dimensjonale motstykker, og har funnet anvendelser for eksempel innen utviklingen av den generelle relativitetsteorien. Gromov spilte en avgjørende rolle i etableringen av moderne global Riemannske geometri. Hans løsninger av viktige problemer innen global geometri bygget på nye begreper, som konvergens av Riemannske mangfoldigheter og et kompakthetsprinsipp. Begge disse har av ettertiden fått navn etter Gromov.

Gromov er en av grunnleggerne av symplektisk geometri. Det var kjent at holomorfe kurver var et viktig verktøy i studiet av komplekse mangfoldigheters geometri. Imidlertid var det også klart at integrable komplekse strukturer utgjorde et for rigid rammeverk. I en berømt artikkel fra 1985 utvidet Gromov begrepet holomorfe kurver til J-holomorfe kurver på symplektiske

ABELPRISEN 2009

mangfoldigheter. Dette ledet til teorien for Gromov-Witten-invarianter, som nå utgjør et ekstremt aktivt forskningsområde knyttet til moderne kvantefeltteori. Det ledet også til etableringen av feltet symplektisk topologi og har gradvis trengt inn i og omformet mange andre områder av matematikken.

I sine studier av grupper av polynomiell vekst lanserte Gromov ideer som for alltid har forandret vår oppfattelse av diskrete uendelige grupper. Gromov oppdaget at diskrete grupper kan gis en geometrisk tolkning og løste flere problemer av sentral betydning. Hans geometriske tilnærming gjorde innviklede kombinatoriske argumenter mye mer naturlige og kraftfulle.

Mikhail Gromov er alltid på jakt etter nye spørsmål og tenker hele tiden på nye ideer som kan bidra til å løse store problemer. Han har produsert dypt og originalt arbeid gjennom hele sin karriere og er fremdeles i besittelse av en usedvanlig skaperkraft. Gromovs arbeid vil fortsette å være en kilde til inspirasjon for mange fremtidige matematiske oppdagelser.



EN LITEN UTDYPING AV KOMITEENS BEGRUNNELSE

Riemannsk geometri

Komiteen sier: *Gromov spilte en avgjørende rolle i etablering av moderne global Riemannsk geometri. Hans løsninger av viktige problemer innen global geometri bygget på nye begreper, som konvergens av Riemannske mangfoldigheter og et kompakthetsprinsipp. Begge disse har av ettertiden fått navn etter Gromov.*

Riemannsk geometri er oppkalt etter den tyske matematikeren Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann var student av den store Carl Friedrich Gauss (1777-1855).



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

I forbindelse med sin ansettelse ved universitetet fikk Riemann i 1853 i oppdrag av Gauss å forberede en prøveforelesning om geometriens grunnlag. Riemann jobbet hardt i flere måneder og brukte anledningen til å utvikle en teori for geometri i høyere dimensjoner. Han holdt foredraget i Göttingen i juni 1854, foran et meget entusiastisk og imponert publikum. Foredraget skulle vise seg å bli et av de viktigste arbeidene innen moderne geometri. Tittelen for foredraget var *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* ("Om hypotesene som geometrien bygger på"), og det ble publisert i artikkelform i 1868. Innholdet i dette arbeidet er det vi i dag kaller Riemannsk geometri. Riemannsk geometri er den delen av differensialgeometri som dreier seg om såkalte Riemannske mang-

foldigheter. En Riemannsk mangfoldighet er en glatt mangfoldighet utstyrt med en Riemannsk metrikk, dvs. et kontinuerlig og glatt varierende indreprodukt på tangentrommet i hvert punkt. Metrikken gir oss lokale måledata som vinkler, buelengder, areal og volum.

Gromov har ført den matematiske arven til Riemann videre. Han introduserte i 1980-årene det som nå kalles Gromov-Hausdorff-avstand mellom to metriske rom. Avstanden måles ved å legge de to rommene inn i et tredje, større rom og så gjøre sammenlikningen der. Gromov beviste to fundamentale resultater for denne konstruksjonen, et prekompakthetsteorem og et konvergensteorem.

Symplektisk geometri

Komiteen sier: Gromov er en av grunnleggerne av symplektisk geometri. Det var kjent at holomorfe kurver var et viktig verktøy i studiet av komplekse mangfoldigheters geometri. Imidlertid var det også klart at integrable komplekse strukturer utgjorde et for rigid rammeverk. I en berømt artikkel fra 1985 utvidet Gromov begrepet holomorfe kurver til J-holomorfe kurver på symplektiske mangfoldigheter. Dette ledet til teorien for Gromov-Witten-invarianter, som nå utgjør et ekstremt aktivt forskningsområde knyttet til moderne kvantefeltteori. Det ledet også til etableringen av feltet symplektisk topologi og har gradvis trengt inn i og omformet mange andre områder av matematikken.

Ordet "symplektisk" er inspirert av ordet "complex", og introdusert av Hermann Weyl; tidligere hadde "symplektiske grupper" blitt kalt "linjekomplekse grupper". Ordet kompleks kommer fra latin *com-plexus*, som betyr "flettet sammen" (*co- + plexus*), mens symplektisk kommer fra det tilsvarende greske ordet *sym-plektos* (*συμπλεκτικός*); i begge tilfeller kommer den siste stavelsen fra den indo-europeiske stavelsen *plek-. Navnsettingen reflekterer en dyp sammenheng mellom komplekse og symplekse strukturer.

Symplektisk geometri er grenen av differensialgeometri hvor objektene som studeres er symplektiske mangfoldigheter. En symplektisk mangfoldighet er en differensiabel mangfoldighet utstyrt med en lukket, ikke-degenerert 2-form. Symplektisk geometri har sin opprinnelse i den

Hameltonske formalismen for klassisk mekanikk, der faserommet til et bestemt fysisk system på en naturlig måte antar en symplektisk struktur. Symplektisk geometri har mange fellestrekk, men skiller seg samtidig på vesentlige områder fra Riemannsk geometri. I motsetning til det Riemannske tilfellet har symplektisk geometri ingen lokale invarianter som f.eks. krumning. En annen forskjell er at ikke alle mangfoldigheter tillater en symplektisk struktur, det er visse topologiske begrensninger. Den viktigste er at en symplektisk mangfoldighet må være av jevn dimensjon og orienterbar. Symplektisk geometri kalles også symplektisk topologi, selv om symplektisk topologi egentlig er det underområdet hvor man studerer globale spørsmål innen symplektisk geometri.

Gromov utnyttet eksistensen av en nesten kompleks struktur på symplektiske mangfoldigheter til å utvikle teorien for pseudoholomorfe kurver. Denne teorien ga støtet til en rekke resultater innen symplektisk geometri, bla. oppdagelsen av det som nå kalles Gromov-Witten-invarianter. Disse invariantene spiller en viktig rolle i strengteori.

Grupper med polynomiell vekst

Komiteen sier: I sine studier av grupper av polynomiell vekst lanserte Gromov ideer som for alltid har forandret vår oppfattelse av diskrete uendelige grupper. Gromov oppdaget at diskrete grupper kan gis en geometrisk tolkning og løste flere problemer av sentral betydning. Hans geometriske tilnærming gjorde innviklede kombinatoriske argumenter mye mer naturlige og kraftfulle.

Innen gruppeteori betegner begrepet vekstrate til en gruppe med hensyn på en symmetrisk generatormengde veksten i antall "ord" i generatorene av økende lengde. Elementene i gruppa kan skrives som produkt av generatorer og vekstraten sier noe om hvor fort antall elementer som kan skrives som et produkt av lengde n øker med økende n .

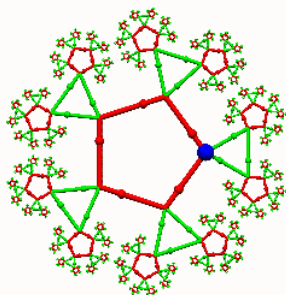
Gromov beviste følgende teorem:

ABELPRISEN 2009

Teorem (Gromov 1981).

En endelig-generert gruppe G har polynomiell vekst hvis og bare hvis den er virtuelt nilpotent.

Det å ha polynomiell vekst er en geometrisk egenskap ved Cayley-grafen til gruppa, mens det å være nilpotent er en rent algebraisk egenskap. Det er ikke vanskelig å vise at nesten nilpotente grupper har polynomiell vekst; den vanskelige implikasjonen er den motsatte, og Gromov trengte å introdusere flere nye geometriske begreper for å bli i stand til å oversette den geometriske informasjonen til algebraiske konklusjoner. Ideene hans har i ettertid etablert seg som basiskunnskap for ulike strategier for å løse vanskelige problemer innenfor dette området.



SAGT OM MIKHAIL GROMOV (og av Mikhail Gromov)

Marcel Berger mente at Mikhail Gromovs arbeider bør leses så grundig at sidene til slutt faller fra hverandre.

Dennis Sullivan om Mikhail Gromov: *Det er ufattelig hva Mikhail Gromov kan få ut av trekanthetene.*

Fra begrunnelsen for tildelingen av **Nemmersprisen i matematikk**: Mikhail Gromovs arbeider har revolusjonert flere grunnleggende delområder av moderne geometri.

Fra begrunnelsen for tildelingen av **Balzanprisen for Matematikk**: Prisen går til Mikhail Gromov for hans mange originale og dype bidrag innen ulike felt av geometri, og for måten han har anvendt disse bidragene innen andre områder av matematikk og teoretisk fysikk.

Fra begrunnelsen for tildelingen av **Leroy P. Steele Prize for Seminal Contribution to Research**: Mikhail Gromovs artikkel, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds* fra 1985, revolusjonerte fagfeltene symplektisk geometri og topologi, og er sentral i mange forskningsfelt, bla. kvantekohomologi og speilsymmetri.

Fra begrunnelsen for tildelingen av **Kyotoprisen innen matematiske vitenskaper**: Mens matematikere før han studerte intrinsiske egenskaper ved rom valgte Mikhail Gromov en helt ny og innovativ angrepsvinkel. Han studerte avstanden mellom ulike rom og klassifiserte dem i "nære" og "fjerne". Det ga opphav til en dypere forståelse av rommene selv, siden man nå hadde et verktøy til å sammenligne. Gromov har klart å løse mange problemer med denne metoden, spesielt de som dreier seg om relasjoner mellom den globale strukturen til rommet og dets krumning, og i hvilken grad rommet er lokalt krumt.

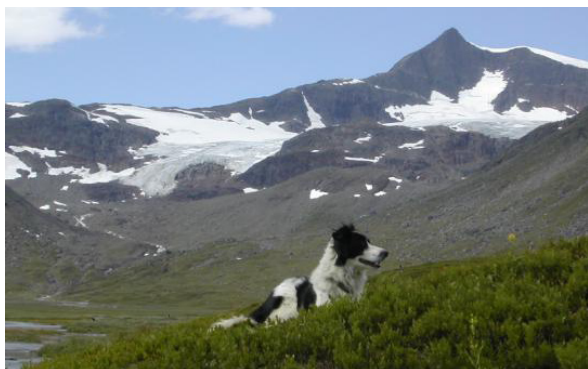
Mikhail Gromov til **Marcel Berger**: *De som leser mine arbeider har en tendens til å se på korollarene og noen ganger også på det tekniske innholdet i bevisene, men det er sjelden de studerer papirene så nøye at de får tak i de bakenforliggende ideene.*

ABELPRISEN 2009

EN LITEN OVERSIKT OVER GROMOV'S MATEMATIKK

Riemannsk geometri

Gromovs hovedinteresse ligger innenfor fagfeltet differensialgeometri. Differensialgeometri er den delen av geometri der objektene man studerer er glatte og gjerne krumme, slik som kurver, flater eller høyere-dimensjonale mangfoldigheter. Objektene kan gjerne ha en tilleggsstruktur, f.eks. en Riemannsk metrikk. En Riemannsk metrikk på en flate er akkurat det ekstra verktøyet vi trenger for å kunne måle avstander og vinkler på flaten. En flate med en Riemannsk metrikk kalles en Riemannsk flate. Den vanligste metrikken på en flate er den Euklidske metrikken, og bak det navnet skjuler seg vårt vanlige avstandsbegrep.



Men la oss nå forestille oss at flaten er en del av et landskap og at metrikken uttrykker hvor tungt det er å bevege seg i enhver retning i ethvert punkt på flaten. I myrlendt område er verdien av metrikken stor sammenliknet med områder med fast grunn. Forskjellige verdier av metrikken i forskjellige retninger i ett og samme punkt kan også forekomme, igjen avhengig av grunnen. En avstand mellom to punkter i denne metrikken gir oss et uttrykk for hvor lang tid eller hvor mye krefter vi bruker på å bevege oss mellom de to punktene.



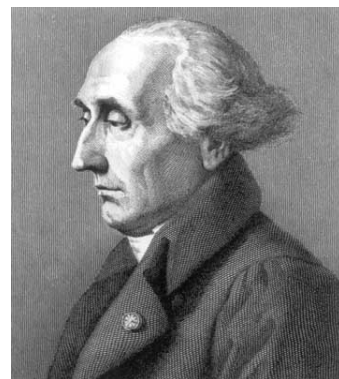
Et av de mest fundamentale begrepene hva gjelder Riemannske flater er den såkalte Gausskrumningen til flaten. Begrepet ble først studert av Leonhard Euler (1707-1783), men det var Carl Friedrich

Gauss (1777-1855) som utviklet teorien. Et plan med den vanlige Euklidske metrikken har ingen Gausskrumning, mens samme planet med hvorvanskelig-er-det-å-gå-metrikken som beskrevet ovenfor, kan være ganske krumt! I dag finnes det mange krumningsbegreper og -definisjoner, og alle har som sin hovedoppgave å måle hvor langt et rom er fra å være flatt.

Gausskrumningen i et punkt på en flate er definert som produktet av hovedkrumningene i punktet, summen av dem kalles middelkrumningen. Hovedkrumningene er maksimums og minimumsverdiene av krumningen til de plane kurvene vi får når vi snitter flaten med plan som står normalt på tangentplanet i punktet.

De viktigste egenskapene til en flate er de som er definert intrinsikt, dvs. definert kun gjennom avstander på flaten som er målt langs kurver på flaten. Flater blir ofte definert som grafen til en funksjon i to variable og før Gauss definerte man krumning ved hjelp av denne funksjonen. Egenskaper ved flaten som er definert på denne måten kalles ekstrinsike, det motsatte av intrinsike. Gauss viste i sitt Theorema Egregium ("Oppsiktsvekkende teorem") at til tross for den opprinnelige ekstrinsike definisjonen, så er

Gausskrumning en intrinsik egenskap. Bernhard Riemann (1826-1866) generaliserte dette til høyere dimensjoner og la med det grunnlaget for det som i dag kalles Riemannsk geometri.



Den franskitalienske matematikeren Joseph-

Luis Lagrange (1736-1813) stilte i 1760 følgende spørsmål: Gitt en lukket kurve i rommet, hvordan ser flaten ut som har denne kurven som sin rand og som har minimalt areal? En slik flate kalles en minimalflate. Svaret på spørsmålet ble gitt av den litt mer ukjente matematikeren Jean Baptiste Meusnier (1754-1793) 16 år senere. Han viste at en flate er minimal hvis og bare hvis middelkrumningen til flaten er 0. Minimalflater opptrer på en naturlig måte i naturen. Ved å dyppe en ståltråd formet som den aktuelle kurven ned i såpevann,



vil såpefilmen som dannes når vi tar tråden opp av vannet beskrive minimalflaten som svarer på spørsmålet.

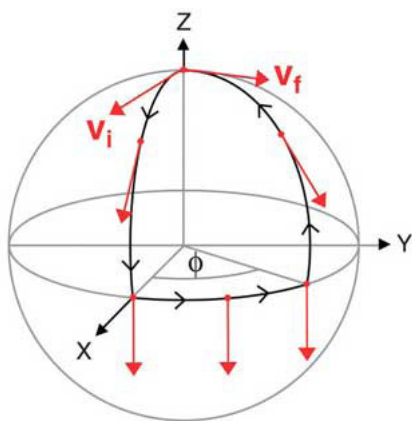
Kurver på en flate som er slik at de danner den korteste veien mellom sine endepunkter kalles geodesiske kurver. De svarer til rette linjer i et euklidisk rom. Matematisk beskrives de gjennom partielle differensiallikninger som oppstår fra såkalt variasjonsregning og de er intrinsikt definert, dvs. uavhengig av rommet som flaten er puttet inn i.

En måte å definere Gausskrumning i et punkt er å se på grenseverdien for kvotienten av avviket mellom vinkelsummen $\alpha + \beta + \gamma$ og π , og arealet av sukssesivt mindre og mindre geodesiske trekant-

er, med vinkler α, β, γ og som omslutter punktet. Kvalitativt sier vi at flaten er positivt eller negativt krummet i henhold til tegnet på differensen $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ for

små trekant-er. En kuleflate har overalt positiv krumning siden vinkelsummen i en trekant på jordoverflaten er større enn π , mens plangeometri ikke krummer siden vinkelsummen som kjent er π eller 180 grader i det tilfellet.

Siden en Riemannsk flate har en veldefinert krumning i hvert eneste punkt, har det mening å summere opp alle krumningene for å finne gjennomsnittskrumningen for hele flaten, eller



totalkrumningen som den kalles i litteraturen. Totalkrumningen er beskrevet i et vakkert resultat, kjent som Gauss-Bonnet-teoremet. Resultatet sier at totalkrumningen kan beregnes kun ved hjelp av topologiske egenskaper til flat-

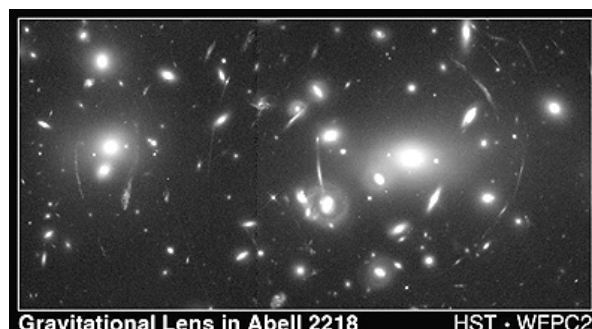
en, dvs. uten verken å kjenne krumning eller metrikk. For en lukket flate, slik som kuleflaten eller overflaten til en smultring, kjent som en torus, sier Gauss-Bonnet at den totale krumningen er lik 4π minus 4π ganger antall



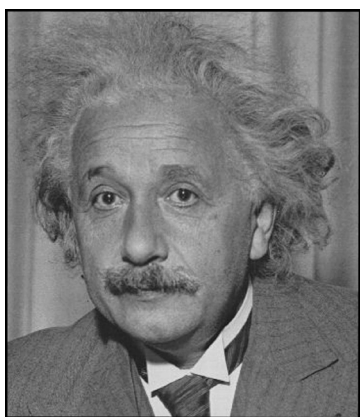
hull i flaten. Kuleflaten har ingen hull og den totale krumningen er derfor lik 4π , for øvrig samme tall som arealet til kuleflaten når radius er satt til å være 1. Torusen har ett hull og den totale krumningen er derfor 0. Denne relasjonen mellom det lokale begrepet krumning og det globale begrepet antall hull har vært forløper for mange viktige resultater i geometri, med Atiyah-Singers indeksteorem som det absolutte høydepunkt. Michael Atiyah og Isadore Singer fikk Abelprisen for dette resultatet i 2004.

Etter hvert som man utvikler mer matematikk dukker det opp nye spørsmål og problemstillinger. I den gaten vi nå er inne i kom raskt spørsmålene opp om hva slags flater det er mulig å konstruere dersom vi krever at krumningen er null overalt, eller hvis den er konstant og positiv eller konstant og negativ? Svarene på disse spørsmålene vil hjelpe oss med å klassifisere alle flater. Mikhail Gromov har vært en svært aktiv bidragsyter i dette arbeidet og har gjennom sine resultater på en fremragende måte styrket vår kunnskap om flater og høyere-dimensjonale mangfoldigheter.

Riemannske geometre begrenser seg på ingen måte til å studere flater. Universet vårt kan beskrives som et tre-dimensjonalt rom. I nærheten

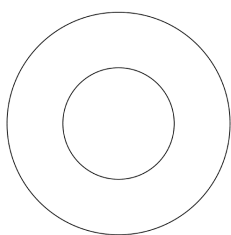


av jorda ser dette rommet ut som et Euklidsk rom, dvs. at rette linjer er rette linjer, hvis vi kan formulere det slik. Andre steder i universet, i nærheten av kjempestjerner eller sorte hulle er dette langt i fra tilfellet. Gjennom Hubble-teleskopet har man observert fjerne punkter hvor det ikke bare er én geodesisk kurve mellom punktene og Hubble-teleskopet, men et helt knippe av slike. Dette kalles gravitasjonal brytning og er en avansert form for dobbelsyn. Ett og samme punkt opptrer tilsynelatende flere ganger på himmelhvelven når vi ser på det i teleskopet. Bakgrunnen for fenomenet er at vårt rom er krumt og ved å kombinere astronomiske observasjoner med teoretiske resultater fra Riemannsk geometri kan vi beregne størrelsen på denne krumningen. Astronomene forestiller seg at krumningen av rommet er relatert til gravitasjonsfeltene rundt kjempestjernene eller de sorte hullene i henhold til en partiell differensiallikning introdusert av Albert Einstein (1870-1955). Dermed kan man faktisk beregne massen til de sorte hullene som forårsaker den gravitasjonale brytningen.



Som nevnt ovenfor kan man lage mange forskjellige metriske strukturer på én og samme flate. Gromov stilte seg spørsmålet om det er mulig å finne alle slike strukturer og til og med gi denne mengden noen form for struktur. Svaret hans er at mengden av alle metriske rom selv er et metrisk rom. Vi kan altså definere en avstand mellom to ulike metriske rom. Gromov gjør dette ved å legge

de to rommene vi skal sammenlikne inn i et felles større rom og så måler han avstanden mellom dem der. Avstanden mellom to kompakte delmengder av et metrisk rom er gitt som den minste lengden som er slik at vi fra et vilkårlig punkt i den ene mengden alltid kan nå den andre mengden.



Gromov-Hausdorff-avstanden mellom to metriske rom er akkurat denne minste lengden når vi optimaliserer det å legge rommene inn i et tredje større rom. Som et eksempel kan vi se på to sirkler med radius 1 og 2. Det er mange måter å tegne disse sirklene på et ark, men lar vi de få felles sentrum så vil avstanden mellom dem være 1. Fra et hvert punkt på den ene sirkelen kan vi nå den andre med en rett linje av lengde 1. Dermed blir Gromov-Hausdorff-avstanden mellom de to sirklene lik 1. Rundt 1980 publiserte Gromov en rekke resultater om det metriske rommet av metriske rom. To av resultatene bærer også hans navn, Gromovs kompakthetsteorem og Gromovs konvergensteorem.

Symplektisk geometri

I 1833 introduserte den irske matematikeren William Rowan Hamilton (1805-1865) det som i dag kalles Hamiltonsk mekanikk. Det er en måte å reformulere klassisk mekanikk etter Newton, motivert av en tidligere reformulering som Lagrange sto for i 1788. For Lagrange var klassisk mekanikk gitt som løsningen av en bestemt andre-ordens differensiallikning på et aktuelt koordinatrom. Hamilton endret formalismen, ved at han så på to sett av koordinater, posisjon og momentum, med hvert sitt sett av koordinater. Lagranges andre-ordens differensiallikning på et n -dimensjonalt rom ble nå erstattet av to første-ordens likninger på et $2n$ -dimensjonalt faserom. Egenskaper ved dette faserommet ble rendyrket og brukt som motivasjon til å definere symplektiske mangfoldigheter. Eller i matematisk språkdrakt, som mangfoldigheter utstyrt med en ikke-degenerert lukket differensiabel 2-form.

Det er nære forbindelseslinjer mellom symplektiske strukturer og det som kalles nesten komplekse strukturer. Sammenhengen ligger i spørsmålet; er det mulig å forstå en $2n$ -dimensjonal reell mangfoldighet som en n -dimensjonal kompleks mangfoldighet, på samme måte som de komplekse tallene kan oppfattes som et to-dimensjonalt reelt rom?

La oss dvele litt ved en liten digresjon, pinneneleken til velkjente Ole Brumm. Sammen med vennene sine kaster han pinner i elva fra

ABELPRISEN 2009

den ene siden av brua og så løper de til den andre siden for å se hvilken pinne som kommer først. Strømmen i elva kan beskrives ved et bestemt vektorfelt, til hvert punkt på vannoverflaten tilordner vi en vektor som beskriver strømmens retning og styrke. Pinnene følger

dette vektorfeltet langs det som kalles integralkurver. For Ole Brumm er det om å gjøre å finne den raskeste veien, eller i det minste en raskere vei enn det Christopher Robin, Tiger-gutt og Tussi finner. Uansett er det opplagt at pinnen finner veien til den andre siden av



brua. Grunnen til det er at strøm-vektorfeltet har helt spesielle, og meget hensiktsmessige egenskaper. Vi kan etterape disse egenskapene, i fagterminologien kalt Cauchy-Riemanns likninger, og anvende dem på det symplektiske faserommet for Hamiltonformalismen vi beskrev over. Det vi da får er en spesiell måte å legge de komplekse tallene inn i en symplektisk mangfoldighet; de beskriver en type kurver som kalles J-kurver eller pseudo-holomorfe kurver. Disse kurvene ble introdusert av Gromov i 1985 og revolusjonerte studiet av symplektiske mangfoldigheter. Spesielt ga de opphav til Gromov-Witten-invarianter og Floer-homologi og spiller en prominent rolle i strengteori, kanskje det hotteste feltet i teoretisk fysikk de siste årene.

Geometriske grupper

I begrunnelsen for årets Abelpristildeling legger

den faglige komiteen spesielt vekt på tre områder hvor geometeren Gromov har spilt en framtrædende rolle. Riemannsk og symplektisk geometri kan man forstå hører med til tumleplassen for en av verdens ledende geometere, men hva har polynomial vekst av grupper med geometri å gjøre?

Vi skal avdekke en forbindelse, og vi begynner med å stille spørsmålet om hvor mange ord språket vårt inneholder? Det er selvfølgelig ingen god ide å starte å telle ord i et språk, men likevel, la oss forsøke. Vi starter med å betrakte ord av lengde 1, slik som i, ø og å. Hvis vi er litt strenge med hva vi mener med et ord så er det vel ikke flere enn disse. Lista over ord av lengde to er mye lenger; vi har to, ku, så, ta og hi for å nevne noen. Vi skal ikke fortsette på disse listene, vi skal heller forandre spillereglene og fokusere på et språk som viser seg å inneholde en veldig viktig matematisk konstruksjon. Her er reglene:

1. Alfabetet inneholder kun to bokstaver, x og y.
2. Alle kombinasjoner av x'er og y'er er ord i dette språket, med to unntak, kombinasjonene xx og yy skal ikke forekomme.

La oss nå telle antall ord i ordboken. Vi teller opp ord av samme lengde, og begynner med 1. I tabellen under har vi listet alle de korteste ordene, sortert etter lengde. La nå $W(n)$ betegne antall ord av lengde n. Et elementært kombinatorisk argument (som vi utelater av plasshensyn) gir at $W(n)$ er lik summen $W(n-1)+W(n-5)$. Det gir oss en enkel oppskrift på å fortsette den

Lengde	Ord	$W(n)$
1	x,y	2
2	xy, yx, yy	3
3	xyx, yxx, yxy, xyy	4
4	xyxy, xyyx, yxyx, yxyy, yyyx	5
5	xyxyx, xyxyy, xyyxy, yxxyx, yxyyx, yxyxx, yxyyy	7
6	xyxyxy, xyxyyx, xyyxyx, xyyxyy, yxyxyx, yxyxyy, yxyxyx, yxyxyy, yxyxyx, yxyxyy	9

høyre tallrekken i tabellen: 2,3,4,5,7,9,12,16,21,28,37,49,65,... Denne tallfølgen har eksponentiell vekst. Det motsatte av eksponentiell vekst er i denne forbindelse polynomial vekst. Polynomial vekst er mye langsommere enn eksponentiell vekst, f.eks. har følgen av naturlige tall, 1,2,3,4,5,6,7,... polynomial vekst.

Språket som vi har beskrevet over er det som i matematisk terminologi kalles elementene i den Projektive modulære gruppa, $PSL(2, \mathbb{Z})$. Det vi har vist, eller i det minste antydnet, er at denne gruppa har eksponensiell vekst. La oss minne om Gromovs resultat fra 1981:

Teorem (Gromov, 1981)

En endelig generert gruppe G har polynomial vekst hvis og bare hvis gruppa er virtuelt nilpotent.

Ved å bruke dette resultatet kan vi nå utlede at den projektive modulære gruppa ikke er virtuelt nilpotent. Dvs. at den ikke inneholder en nilpotent undergruppe av endelig indeks. For gruppeteoretikere er det viktig å vite om en gruppe er virtuelt nilpotent eller ikke. Det vi ønsker å fortelle med dette er at ved å kombinere enkel telling med Gromovs resultat kan vi uttale oss om betydningsfulle egenskaper til $PSL(2, \mathbb{Z})$, en av de mest berømte gruppene i moderne matematikkhistorie.

Så tilbake til vårt opprinnelige spørsmål, om hva dette har med geometri å gjøre. Det er faktisk en metrikk gjemt i vårt språk-eksempel. Begrepet avstand har to helt grunnleggende egenskaper som vi ikke får lov å fravike, trekantulikheten og ekvivalensen mellom null-avstand og likhet. Trekantulikheten er en generalisering av det mer folkelige utsagnet om at den korteste veien mellom to punkter er den rette linje. Ekvivalensen mellom null-avstand og likhet sier at dersom det ikke er noen avstanden mellom to punkter så er de like. I det omtalte språket har det mening å sette sammen ord, ved å sette dem etter hverandre. Det at xx og yyy ikke er tillatt skal vi forstå dithen at dersom vi setter sammen to ord og en av disse kombinasjonene blir resultatet i "skjøten", så stryker vi dem. For eksempel vil sammensetningen av xyx og $xyyx$ gi $xyxyyx = xyyyx = xx = \emptyset$ (vi kaller det tomme ordet for $\emptyset$). Vi må også

kunne invertere et ord, det gjør vi ved å snu ordet bak fram og erstatte yy med y og omvendt; for eksempel vil den inverse til $xyxyx$ være $yyxyx$. Den oppsiktsvekkende erkjennelsen er nå at mengden av ord i dette alfabetet på en naturlig måte former et metrisk rom. Avstanden mellom to ord definerer vi ved å sette sammen det ene ordet med den inverse av det andre og så telle opp antall bokstaver i resultatet. Denne definisjonen respekterer både trekantulikheten og ekvivalensen mellom null-avstand og likhet. Opptelling av punkter innen en gitt avstand fra det tomme ordet er i perfekt analogi med det å beregne arealet av sirkler med den samme avstanden fra et bestemt punkt på en flate. Areal er en kvadratisk funksjon i radiusen, dvs. for flater har vi polynomial vekst av grad 2. Tilsvarende argument kan vi bruke for generelle Riemannske mangfoldigheter av høyere dimensjon, dersom dimensjonen er d vil veksten i volum i d -baller om et punkt være en polynomial funksjon av grad d i radiusen til ballen. Igjen har vi polynomial vekst. Gromovs resultat kan i denne sammenhengen oppfattes å uttale seg om egenskaper ved algebraiske objekter svarende til endelig-dimensjonale mangfoldigheter.

Epilog

Gromovs navn er for alltid knyttet opp mot dype resultater og viktige begreper innen Riemannsk geometri, symplektisk geometri, strengteori og gruppeteori. Abelkomiteen sier i sin begrunnelse: "Mikhail Gromov er alltid på leting etter nye spørsmål og etter nye svar på gamle spørsmål. Han har gjennom hele sin karriere produsert dype og originale arbeider og han er fortsatt bemerkelsesverdig aktiv. Gromovs arbeider vil fortsette å være en kilde til inspirasjon for framtidige matematiske oppdagelser." Gromov er matematikeren som får store resultater ut av enkle ideer. Som Dennis Sullivan så treffend uttaler: "Det er utrolig hva Mikhail Gromov kan få ut av trekantulikheten!"

