



INFOMAT

Mars 2011

Kjære leser!

Samtidig med at dette nummer av INFOMAT slippes løs i offentligheten presenterer preses i Det Norske Videnskaps-Akademis årets Abelprisvinner, John W. Milnor. Milnor har lenge vært en het kandidat og er en verdig vinner. Han er imidlertid også over 80 år, og skriver seg derfor inn i rekken av Abelpristildelinger til gamle menn. Må få unntak har alle prisvinnerne vært godt oppe i årene og et stykke forbi sin aktive matematiske karriere. Vi gjentar derfor vår kommentar fra fjorårets tildeling,

”Men igjen stiller vi spørsmålet om Abelprisens profil. Nesten alle prisene har vært utdelt til litt aldrende stjerner som har håvet inn mengder av hedersbevisninger og ærespriser. Skal man lete etter nye kandidater til neste års Abelpris så er det bare å slå opp på Wolfprisen for 10-15 år siden. Med litt for stor sannsynlighet finner man prisvinnerens navn der.”

Og det gjorde vi, han fikk den i 1989.

hilsen Arne B.



ABELPRISEN 2011 TIL JOHN W. MILNOR

“for banebrytende oppdagelser innenfor topologi, geometri og algebra”.

INFOMAT kommer ut med 11 nummer i året og gis ut av Norsk Matematisk Forening. Deadline for neste utgave er alltid den 10. i neste måned. Stoff til INFOMAT sendes til

infomat at math.ntnu.no

Foreningen har hjemmeside <http://www.matematikkforeningen.no/INFOMAT>

Ansvarlig redaktør er Arne B. Sletsjøe, Universitetet i Oslo.

ARRANGEMENTER

Matematisk kalender

2011:

April:

8. Dagskonferanse: *Karis Dag, Kari Hag fyller 70 år*, Trondheim

Mai:

23.-25. *Abelprisdagene 2011*, Oslo

Juni:

3.-11. Forskerskole: *Algebra, Topology and Fjords!*, Nordfjordeid

20.-23. Abelsymposiet: *Algebras, quivers and representations*, Balestrand

November:

2.-4. NORSMA6: *New trends in Special Needs Education in Mathematics. Problems and Possibilities*, Kristiansand

2012:

August:

2.-7. 6ECM, Krakow, Polen

21.-24. Abelsymposiet: *Operator Related Function Theory and Time-Frequency Analysis*, Oslo



ALGEBRA, TOPOLOGY AND FJORDS! Nordfjordeid 3.-11. juni 2011

Sommerskole med følgende forelesere:

First part: (introductory)

Jean-Louis Loday - Operads

Kathryn Hess - Rational Homotopy Theory

Marco Manetti - Lie Theory

Second part:

James McClure - The Deligne Conjecture

Bruno Vallette - Operads

Stefan Schwede - Derived and Triangulated Categories

Ralph Cohen - String Topology

Web: <http://org.uib.no/nordfjordeid/index.html>

ABELSYPOSIET 2011: ALGEBRAS, QUIVERS AND REPRESENTATIONS

Balestrand, 20.-23. juni 2011

The central theme of the symposium will be representation theory of quivers and algebras and related topics. The representation theory of quivers has had an increasing impact in mathematics, especially due to its concrete and combinatorial nature. It has influenced and has connections with many other areas of mathematics, like commutative algebra, algebraic geometry, algebraic groups, and combinatorics. The symposium will focus on several of these connections like cluster algebras, homological and representation theoretic aspects in commutative algebra and quiver varieties.

Web: <http://abelsymposium.no/2011>



NEW TRENDS IN SPECIAL NEEDS EDUCATION IN MATHEMATICS. PROBLEMS AND POSSIBILITIES Kristiansand, 2.-4. november 2011

The conference will provide rich opportunities for researchers and professionals working within special needs education in mathematics to present and discuss their research or developmental work. Furthermore, the conference will be open for discussions and constructive meetings of researchers, teachers, teacher educators, graduate students and others interested in research and development concerning special needs education in mathematics.

Web: <http://www.uia.no/en/div/conferences/norsma6>

Nye doktorgrader

Mahdi Khajeh Salehani defended on February 4, 2011 his PhD-thesis titled *A study of the three-body problem in the realm of equivariant differential geometry*. The PhD-project was conducted at the Department of Mathematical Sciences, NTNU, under supervision of Prof. Eldar Straume. This thesis is devoted to a study of the qualitative behavior of solutions of the three-body problem in the framework of modern equivariant differential geometry based on the Riemannian geometric approach of Wu-Yi Hsiang and Eldar Straume who revitalized Jacobi's geometric approach to mechanics.

Simply stated, the Newtonian three-body problem, which was described by Whittaker as "the most celebrated of all dynamical problems" and which fulfilled for Hilbert the necessary criteria for a good mathematical problem, is the mathematical study of how three heavenly bodies move in settings where the dynamics are dictated by Newton's law of motion. In practical terms, this area now includes just about any dynamical system of three particles that even remotely resembles Newton's law.

The work can be naturally divided into two main parts: The first part concerns the existence and differential geometric properties of continuous families of periodic three-body motions with non-uniform mass distributions. In this part, using the method of analytic continuation and the modification of masses, the author exhibits two interesting families of vanishing angular momentum periodic orbits for the planary Newtonian three-body problem with non-uniform mass distributions having two equal masses, which connect at the celebrated figure-8 orbit exhibited by A. Chenciner and R. Montgomery (2000) in the case of equal masses, and yield a continuous family of periodic three-body motions. At one end of the family, when the two equal masses are infinitesimal and the third one reaches the value of +1, we arrive at a solution of a double Kepler problem; and at the other end of the family, when the third mass is infinitesimal, we have a special case of periodic solution of a restricted 3-body problem. The second part is concerned with the global geometry of non-planary 3-body motions. Using the methods

of equivariant differential geometry and non-holonomic Lagrangian mechanics, the author obtains the generalized Euler-Lagrange equations on the level of moduli space; and as an application of the derived dynamical equations, he proves a conjecture of A. Wintner (1947) on the classification of the constant inclination solutions of the three-body problem. By a constant inclination solution we mean a 3-body motion whose plane of motion makes a constant inclination angle with respect to the invariable plane passing through the center of mass and perpendicular to the angular momentum vector.

Georg Muntingh ved Matematisk institutt, UiO vil forsvare sin avhandling for graden ph.d. "*Topics in Polynomial Interpolation Theory*", 29. mars 2011

This thesis was carried out at the Centre of Mathematics for Applications at the University of Oslo. Two topics were studied with the goal to improve methods for finding smooth curves and surfaces passing through – or interpolate – certain known points. Such methods are used in a variety of contexts where shapes are constructed from discrete data, from typography to the computer-aided geometric design of cars, ships, and airplanes. The special case where the curves and surfaces are represented locally by polynomials is particularly popular in industrial applications. The numerical properties of such interpolants depend very much on how the data points are situated in space. The simplest configurations of data points are the rectangular grids, which are the points of intersection of some collection of horizontal and vertical lines. The triangular grids form another classical type of configurations; they are the points in the plane with nonnegative integral coordinates (i, j) with $i+j$ bounded from above by some fixed integer. Because of their convenient properties, both configurations have been studied extensively in the literature. The first part of the thesis sets forth explicit formulas for the coefficients of polynomial interpolants to implicit functions on rectangular grids. A closed formula for the

higherorder derivatives of implicit functions appears as a limiting case of these formulas. The second part delves into certain generalizations of triangular grids – generalized principal lattices – that are well suited for interpolation. Applying the theory of real algebraic curves then allows the construction of many new examples of such configurations.

Ledige stillinger

FØRSTEAMANUENSIS / FØRSTE-LEKTOR I MATEMATIKK VED HØGSKOLEN I VESTFOLD

Arbeidsoppgavene vil hovedsakelig være knyttet til matematikkfaget i lærerutdanninger rettet mot grunnskolen og i førskolelærerutdanningen. Noe kurs- og oppdragsundervisning eller undervisning ved andre fakulteter ved høyskolen kan være aktuelt.

Stillingene ønskes besatt av personer med (bl.a.):

- *førstekompetanse eller hovedfag/mastergrad i matematikkdiraktikk, matematikk eller matematisk fag

- *erfaring fra arbeid med lærerutdanning ved høyskole/universitet

- *erfaring fra arbeid i skole/barnehage

- *erfaring med informasjonsteknologi/bruk av IKT innenfor fagområdet

Undervisningen vil foregå på Høyskolen i Vestfold studiested Bakkenteigen. Noe undervisning ved studiested Larvik kan være aktuelt.

Søknadsfrist 31. mars 2011.

FØRSTEAMANUENSIS/FØRSTE-LEKTOR INNEN MATEMATIKK/MATEMATIKKDIRAKTIKK, HØGSKOLEN I BUSKERUD, AVDELING FOR LÆRERUTDANNING

Hovedarbeidsstedet for stillingen er Drammen. Høyskolen har faglig aktivitet ved tre campus slik at det må påregnes noe reisevirksomhet i forbindelse med faglig aktivitet og møtevirksomhet til de øvrige studiestedene Hønefoss og

Kongsberg.

Arbeidsoppgavene vil være undervisning, veiledning, evaluering av studentoppgaver og oppfølging av studienes praksis og forskning i matematikk eller matematikkdiraktikk. Den som tilsettes må også kunne delta i utvikling av studier på bachelor- og mastergradsnivå. Stillingen krever fagligpedagogisk kompetanse og god faglig formidlingsevne.

Det er ønskelig med undervisningserfaring fra grunnskolen eller fra videregående skole og pedagogisk utdanning. Det er også ønskelig at personen vi tilsetter har erfaring med eller interesse for de utfordringer flerkulturelle studenter og elever stilles overfor, samt kjennskap til og interesse for pedagogisk bruk av IKT. Det vil bli lagt vekt på pedagogiske kvalifikasjoner.

Søknadsfrist 8. april 2011

PHD RESEARCH FELLOW (STIPENDIAT) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UIO

The fellowship is for a period of up to 4 years, with 25 % compulsory work. Starting date no later than 01.10.2011. The successful candidate will work at the Section for Mathematics at the Department of Mathematics.

The research areas covered by the Section for Mathematics comprise the strategic areas of geometry/topology, operator algebras, partial differential equations and stochastic analysis, and also the areas of algebra/algebraic geometry, mathematical logic and several complex variables. We seek candidates whose research interests enhance and complement the existing strengths of the Section for Mathematics.

Application deadline: April 15, 2011

PHD RESEARCH FELLOW (STIPENDIAT) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UIO

The position is affiliated with the research group in Stochastic Analysis, finance, insurance and risk. This research group has members both from the section of Mathematics and the section

of Statistics and Insurance Mathematics .

The fellowship is for a period of up to 4 years, with 25 % teaching duties. Starting date no later than 01.10.2011.

In recent years insurance companies in a series of European countries have been committed to implement several new initiatives of supervision and politics in their insurance business. These guidelines are known under the notion of Solvency II. The main objective of the new framework is to ensure the ability of the insurer to meet all its liabilities. The Solvency II regime encompasses guidelines that are required to be risk-adjusted and based on market-consistent valuation of the balance sheet of an insurance company. Other important aspects of this regulatory framework pertains to asset and liability management (ALM) in insurance companies, that is the financial risk management of insurance companies. The PHD project will be a part of the project "Quantitative Risk Analysis and Risk Management in Insurance", and it will refer to the development and implementation of stochastic models for quantitative risk management and risk analysis under the Solvency II regime (in particular in Norway).

Application deadline: April 15, 2011

MELTZERPRISEN TILDELT AUDUN HOLME

Professor Audun Holme, UiB, ble den 8. mars på Meltzerfondets årlige festmiddag tildelt Meltzerprisen for fremragende forskningsformidling 2010 av rektor Sigmund Grønmo. Prisen er på kr. 100.000.

SMALE-PRISEN TIL SNORRE H CHRISTIANSSEN, UiO

Martin Toft, Uniforum

Matematikkprofessor Snorre H. Christiansen ved UiO får tildelt Stephen Smale-prisen for yngre forskarar. – Eg er litt spent, for det er første gong prisen blir utdelt, seier Snorre Christiansen til Uniforum.

Matematikkprofessor Snorre H. Christiansen ved UiO er tildelt Stephen Smale-prisen 2011 for unge og lovande forskarar.

Stephen Smale er ingen kven som helst. Han tilhører dei store blant matematikarane og allereie på 1960-talet blei han tildelt matematikkens gjevaste pris, Fieldsmedaljen.



– Sjølv sagt har eg høyr om han, og eg har også

høyr han på ein konferanse, men eg har aldri helsa på han, fortel Christiansen. Etter det han forstår, skal prisen vera ei hjelp til etablering for yngre forskarar som arbeider i grenseland mellom bruksretta matematikk og rein matematikk.

– For meg personleg vil det føra til at eg blir meir synleg internasjonalt. Først får eg høve til å dra til Budapest og halda eit foredrag på den internasjonale matematikkonferansen der prisen skal delast ut. Så mange tilhørarar vil eg truleg aldri tidlegare ha hatt under mine foredrag, trur han.

Snorre H. Christiansen er i dag ein av forskarane ved Senter for bruksretta matematikk (CMA), og han forskar på partielle differensiallikningar i grenseområdet mellom bruksretta og rein matematikk.

– Det blir brukt i alt frå industri og finans til vitenskaplege modellar i fysikk og biologi, fortel Christiansen. Han starta matematikkutdanninga i Paris og krona den med ein doktorgrad frå École Polytechnique i Paris, etter å ha budd ni år i byen som har den høgaste konsentrasjonen av matematikarar i verda.

– Etter eit kort opphald i Zurich lengta eg tilbake til Oslo, og då sjansen baud seg, blei eg tilsett, først som førsteamanuensis og seinare som professor ved Matematisk institutt, seier han.

Christiansen vil gjerne gi masse honnør til rettleiaren sin, Jean-Claude Nédélec i Paris, senterleiar Ragnar Winther og den tidlegare ph.d.-stipendiaten sin, Tore Gunnar Halvorsen.

– Dei har vore viktige samarbeidspartnarar for meg i forskinga mi, understrekar han.

NYHETER



Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2010–2011. Resultater

Finale 10. mars 2011

Det ble gitt maksimalt 10 poeng for hver oppgave.

Navn	Skole, klasse	Oppgave				Sum
		1	2	3	4	
1 Karl Erik Holter	Stabekk vgs, 3stb	10	10	10	6	36
2 Une André Simonsen	Vestborg VGS, vg3	5	4	2	10	21
3 Håvard Bakke Bjerkevåg	Volda vgs, 3st1	6	5	0	8	19
4 Håkon A. H. Olsen	Hafstad vgs (Førde), 3stb	5	0	6	6	17
5 Tengfei Zhang	Drammen vgs, 3stg	2	10	3	1	16
6 Gunnar Arvid Sveinsson	Sandnes vgs, 3g	2	10	0	2	14
7 Sofia Lindqvist	Trondheim katedralskole, 2std	2	0	5	5	12
8 Sindre Nås	Foss vgs (Oslo), 3c	6	0	3	2	11
8 Jan Henrik Wiik	Nadderud vgs (Bekkestua), 2d	5	0	2	4	11
10 Håkon Dugstad Johnsen	Voss gymnas, 3b	5	3	1	0	9
10 Réka Zempléni	Red Cross N. U. W. College (Flekke), ib1	5	0	0	4	9
12 Nikola Miličević	Red Cross N. U. W. College (Flekke), ib1	7	0	0	1	8
13 Elisabeth Ingeberg Jørstad	Oslo katedralskole, 3c	5	0	1	1	7
13 Eirik Klungre	Firda vgs (Sandane), 1sta	5	0	1	1	7

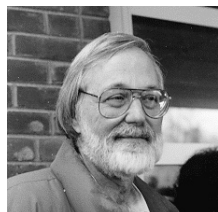
Videre, alfabetisk:

Trond Ikdahl Andersen	Ås vgs, 3iba
Are Søndresen Austad	Sandnes vgs, vg3d
Martin Hallén	Berg vgs (Oslo), 3std
Gard Olav Helle	Foss vgs (Oslo), 2c
Kari Lovise Lodsby	Gran ungdomsskole, 9b
Fredrik Nevjen	Mailand vgs (Lørenskog), 1std
Johannes Josef Norheim	Lycée P. Corneille (Rouen, Frankrike), vg2
Moritz Walter	Trondheim katedralskole, 2sta

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å tildele Abelprisen for 2011 til

John Willard Milnor
Institute for Mathematical Sciences, Stony
Brook University, New York

“for banebrytende oppdagelser innenfor topologi, geometri og algebra”.



Milnors arbeid er i sin helhet preget av fremragende forskning: dyp innsikt, levende fantasi, overraskelselementer og enestående kvalitet.

Milnors oppdagelse av eksotiske glatte sfærer i sju dimensjoner var fullstendig uventet. Oppdagelsen var forløperen for differensialtopologien og førte til en eksplosjon av arbeider fra en hel generasjon fremragende matematikere. Denne eksplosjonen har vart i flere tiår og har endret hele matematikklandskapet. Sammen med Michel Kervaire arbei-

det Milnor videre og gav en fullstendig fortegnelse over alle distinkte differensiabile strukturer på sfærer av alle dimensjoner. Spesielt viste de at den sjudimensjonale sfære har nøyaktig 28 distinkte differensiabile strukturer. De var blant de første til å identifisere firedimensjonale mangfoldigheters spesielle egenart, og banet således veien for grunnleggende utvikling innenfor topologi. Milnors motbevisning av den etablerte Hauptvermutung endret forventninger til kombinatorisk topologi som gikk tilbake til Poincaré. Milnor oppdaget også homeomorfe glatte mangfoldigheter med ikke-isomorfe tangentbunter, og i den forbindelse utviklet han teorien om mikrobunter. I tre-mangfoldighetsteori beviste han et elegant unikt faktoriseringsteorem.

I tillegg til topologi har Milnor gitt betydelige bidrag til differensialgeometri, algebra og dynamiske systemer. På hvert eneste område Milnor har hatt befattning med, har hans innsikt og tilnærminger hatt avgjørende betydning for senere utvikling. Hans monografi om isolerte hyperflatesingulariteter anses for å være det enkeltstående mest innflytelsesrike arbeidet innenfor singularitetsteori, og har gitt oss Milnor-tallet og Milnor-fibre.

Topologene begynte å bruke Hopf-algebraer og koalgebraer aktivt etter Milnors og J.C. Moores avgjørende arbeid. Milnor kom selv fram til ny innsikt i strukturen i Steenrod-algebraen (av kohomologioperasjoner) ved bruk av Hopf-algebraer. I algebraisk K-teori introduserte Milnor grad to funktoren; hans berømte formodning om funktoren – som til slutt ble bevist av Voevodsky – gav støtet til nye retninger i studiet av motiver i algebraisk geometri. Milnors innføring av vekstinvarianten til en gruppe knyttet kombinatorisk gruppeteori til geometri, og banet vei mot Gromovs teori om hyperbolske grupper. Senere vendte John Milnor oppmerksomheten mot dynamiske systemer i lave dimensjoner. Sammen med Thurston var han en pioner i utviklingen av “kna-teori” for intervallavbildninger, hvorved det kombinatoriske grunnlaget for intervalldynamikk ble etablert, noe som skapte et fokus for intens forskning i tre tiår. Milnor–Thurston-formodningen om entropi-monotonisitet førte til forsøk på å forstå fullt ut dynamikken i den reelle kvadratiske familie. Dette dannet bro mellom

NYHETER

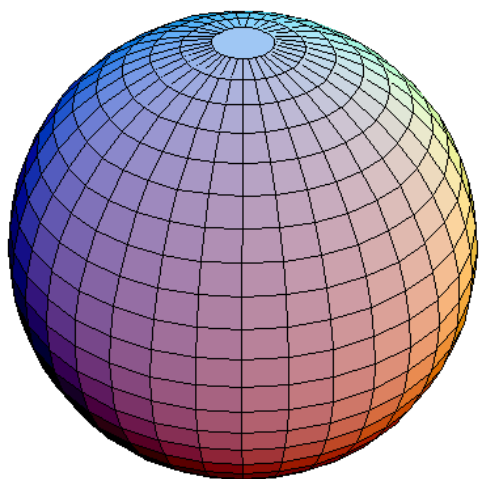
reell og kompleks dynamikk på en dyptgående måte, og utløste meget interessante fremskritt.

Milnor er en fantastisk begavet formidler av avansert matematikk. Han har ofte taklet vanskelige, banebrytende emner som ikke tidligere har vært omhandlet i bokform. Med ny kunnskap har han frembrakt en rekke tidsmessige, og ikke minst varige arbeider som representerer overlegen innsikt. På samme måte som en musiker kan være en inspirert komponist og en karismatisk utøver, er matematikeren John Milnor både en oppdager og en formidler.

EKSOTISKE SFÆRER I 7 DIMENSJONER

Sju-dimensjonale sfærer

En sfære i sju dimensjoner er en generalisering av den ordinære to-dimensjonale sfæren. Vi betrakter en sirkel som en en-dimensjonal sfære, og ved å fikserer to diametralt motsatte punkter og spinne sirkelen rundt i den neste dimensjonen, får vi en to-dimensjonal sfære. Vi kan gjøre det samme med en to-dimensjonal sfære, sette en fingertupp på nordpolen og en på sydpolen, og



spinne sfæren rundt i en høyere dimensjon. Det gir oss en (ikke-visuell) tre-dimensjonal sfære. Dette fortsetter vi med til vi kommer til en sju-dimensjonal sfære.

En annen beskrivelse av sfærene går via symmetri. Sirkelen består av alle punkter i planet med en gitt avstand til et bestemt punkt, som vi kaller sentrum. Den to-dimensjonale sfæren er definert på samme måte, som alle punkter i rommet med

gitt avstand til et sentrum. Den sju-dimensjonale sfæren består av alle punkter i et åtte-dimensjonalt rom med gitt avstand til et utvalgt sentrum.

Differensiabel strukturer

Lokalt, dvs. på en liten del av sfæren, er det å gi en differensiabel struktur omtrent det samme som å tegne et kart over området. Dette kan gjøres på mange forskjellige måter. For å definere en differensiabel struktur på hele sfæren, må vi ha nok kart til å dekke hele sfæren, og i tillegg må vi vite hvordan vi kan gå fra det ene kartet til det andre der de overlapper. Siden kuleskallet er krumt, vil kartene bli litt fortenget langs kanten, parallelle linjer vil sprike. Når vi legger kartene over/inntil



hverandre, så vil de tilsvarende parallelle linjene sprike i hver sin retning i overlappingen mellom de to kartene. For å kunne lese kartene i sammenheng må vi definere en overgangsfunksjon mellom de to kartene der de overlapper. Vanskeligheten, i en matematisk forstand, er ikke å tegne kartene eller å beskrive overlappingsfunksjonene, men å få alle de enkelte kartene til å henge sammen hele veien rundt, også når vi kommer til det aller siste kartet, som skal passe med fire overlappende kart. Intuitivt virker ikke dette som noe problem, og det er det heller ikke på en vanlig sfære, men dersom man prøver å gjøre dette for en 7-dimensjonal sfære, med tilsvarende 7-dimensjonale kart, er det hele ikke så enkelt.

Eksotiske sfærer

For å få dette til må man undreveis gjøre valg. Milnor og Kervaire beviste at det finnes hele 28 måter å gjøre dette på. En av dem er nokså rett fram, omtrent som i det to-dimensjonale tilfellet, mens de 27 andre ikke har noen analogier for to-dimensjonale sfærer. Milnor kalte disse 27 andre for eksotiske strukturer eller eksotiske sfærer.

NYHETER

dimensjon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
# strukturer	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

ANTALL FORSKJELLIGE DIFFERENSIABLE STRUKTURER PÅ SFÆRER I LAVE DIMENSJONER

Status for dimensjon 4 er fortsatt uavklart. Man vet ikke om det er 1, flere enn 1 eller uendelig mange glatte strukturer på en 4-sfære. Påstanden om at det er nøyaktig én er kjent under navnet “den glatte Poincaré-formodningen i dimensjon 4”. Bakgrunnen er at da Michael Freedman i 1982 beviste Poincaré-formodningen i dimensjon 4, dvs. at enhver 4-mangfoldighet som er homotopi-ekvivalent til en 4-sfære er homeomorf med en 4-sfære, så etterlot han et nytt ubesvart spørsmål. Vil en 4-mangfoldighet som er homotopi-ekvivalent til en 4-sfære også være diffeomorf med en 4-sfære? Milnors eksotiske sfærer viser uansett at den glatte Poincaré-formodningen er gal i dimensjon sju.

ÉTOILE-PLASSEN I PARIS, MED TRIUMFBUEN, HAR MILNORTALL 19

På 60-tallet jobbet John Milnor med singularitetsteori. Begrepene Milnortall, Milnorfiber og Milnoravbildning stammer fra disse arbeidene. I stedet for å fokusere på den formelle definisjonen, den som sier at det inverse bildet til den holomorfe avbildningen $f: (C^{n+1}, 0) \rightarrow (C, 0)$ som definerer singulariteten, av en punktert disk $D - \{0\}$ i C , snittet med en ball B_δ med radius δ om 0 i C^n , er homotopiekvivalent med en bukkett av reelle n -sfærer, der antallet gir oss Milnor-tallet, så skal vi angripe problemet fra en noe mer dagligdags side.

Milnortall for veikryss

Hva er forskjellen på et generelt punkt på en vei og et veikryss? Spørsmålet kan ha mange mer eller mindre fantasifulle svar. Blant de originale svarene er kanskje at de to punktene har forskjellig Milnortall. Et vilkårlig punkt langs veien har Milnortall



0, mens et veikryss der to veier krysser hverandre har Milnortall 1. Og Étoile-plassen i Paris, der Triumf-buen er plassert i skjæringspunktet mellom 6 kryssende avenyer, har

Milnortall 19. Økende Milnortall betyr mer komplekse veikryss.

Begrepet Milnortall, om enn ikke navnet, ble introdusert av John Milnor på 1960-tallet i hans studier av isolerte komplekse hyperflatesingulariteter. Singulariteter er spesielle punkter på kurver, flater eller andre rom hvor vi har “for mange tangenter”. I eksempelet vi startet med, er veiene kurver. Kurver er 1-dimensjonale figurer og 1-dimensjonale figurer skal i prinsippet ha kun én tangentretning, langs med veien. Veikryssene er singulære punkter fordi vi ikke bare har én, men mange tangentretninger.



Gjennom Triumf-buen er det hele 6 retninger med svære avenyer begge veier.

Generelt begrep

Nå er det selvfølgelig ikke nødvendig å introdusere

NYHETER

Milnortall for å telle gater i Paris. Men Milnortallet kan beregnes i langt mer komplekse tilfeller enn den enkle situasjonen med et antall veier som møtes i et felles kryss. F.eks. er spissen av en kro-neis en flatesingularitet med Milnortall 1.

I prinsippet kunne vi også beregnet Milnortallet til et svart hull i universet, hadde vi bare visst hvordan hullet ser ut inni. Dessverre vet vi ikke det, siden det verken slipper lys eller annen informasjon ut av et sort hull.

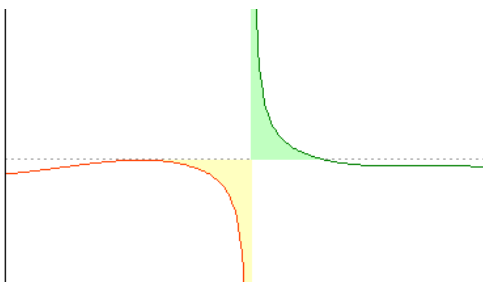
Milnortallet til en singularitet er det vi kaller en invariant for singulariteten. Det innebærer at dersom to forskjellige singulariteter har samme type kompleksitet, så har de også samme Milnortall.



Deformasjonsteori

En annen tolkning av Milnortallet til en singularitet er som antallet deformasjoner av singulariteten. Med en deformasjon av en singularitet mener vi en liten pertubasjon av likningene som definerer singulariteten. Resultatet er at formen til singulariteten endrer seg dramatisk, i mange tilfeller er ikke engang den deformerte singulariteten noen singularitet. Et eksempel på dette er veikrysset der to veier krysser hverandre på tvers. En deformasjon av dette punktet splitter opp singulariteten i to punkter og veikrysset i to veier som ikke møtes, slik figuren viser.

Milnortall 1 sier at i dette tilfellet kun finnes én måte å deformere singulariteten. Man kunne tenke seg å forbinde de to veiene på motsatt måte, at veien fra øst knyttes sammen med veien fra sør og vestveien med den fra nord. Men dette er essensielt samme deformasjon som den på figuren, forskjellen kan forklares ved en multiplikasjon med -1 .

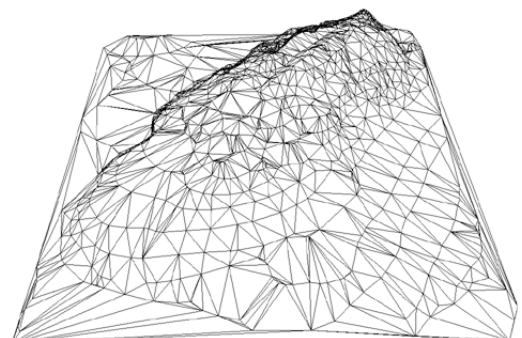


DIE HAUPTVERMUTUNG DER KOMBINATORISCHEN TOPOLOGIE (STEINIZ, TIETZE; 1908)

Die Hauptvermutung (Hovedhypotesen) innen kombinatorisk topologi (kalles i dag algebraisk topologi) er en hypotese som ble lansert allerede i 1908 av den tyske matematikeren Ernst Steiniz og østerrikeren Heinrich Tietze. Hypotesen sier at to trianguleringer av et rom alltid har en felles forfining. Hypotesen ble bevist i dimensjon 2 av Tibor Radó på 1920-tallet og i dimensjon 3 Edwin E. Moise på 1950-tallet. I høyere dimensjon stemmer ikke hypotesen. Det ble bevist av Milnor i 1961 ved at han ga et moteksempel.

Triangulering

Da Norges Geografiske Oppmåling (NGO) ble opprettet av offiseren Heinrich Wilhelm von Huth i 1773 var formålet å måle opp Norge for å kunne tegne nøyaktige kart. I 1779 startet arbeidet med trianguleringen. Triangulering innebærer at man plukker ut referansepunkter som man beskriver posisjonen til i forhold til de om-liggende referansepunktene. Man trekker linjer mellom nærliggende punkter, på en slik måte at hele det oppmålte arealet blir dekket av trekanter. Valg av referansepunkter og forbindelseslinjer gjøres slik at landområdet innenfor hver trekant

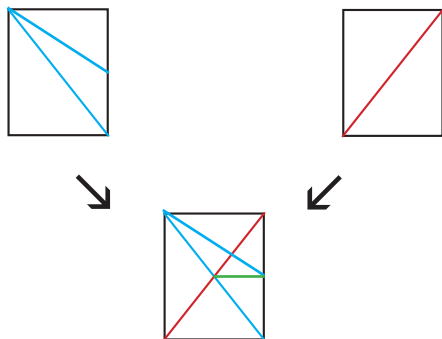


blir mest mulig plant. Det betyr at på steder hvor det er veldig kupert, så trenger man mange og tettliggende referansepunkter, mens på flate jordbruksområder kan man klare seg med få punkter. Resultatet blir at man får en god beskrivelse av hele området, både horisontalt og vertikalt.

Denne oppskriften på triangulering kan vi bruke på en vilkårlig flate. Trianguleringen av flaten gir oss en stykkvis lineær modell av flaten. I mange sammenhenger kan denne modellen erstatte flaten. Den er lettere å regne på, og den har samtidig bevart en rekke av flatens viktige egenskaper.

Forfining av trianguleringer

I *Hauptvermutung* inngår begrepet forfining av en triangulering. Dette dreier seg om å ta en allerede eksisterende oppdeling i trekkanter og dele denne ytterligere opp, i nye, mindre trekkanter. I praksis foregår det ved at vi introduserer flere referansepunkter, og trekker de nødvendige forbindelseslinjene for å skaffe oss et lappverk av trekkanter.



To trianguleringer av et rektangel og deres felles forfining

Det finnes ikke noen entydig måte å triangulere en flate. Det er uendelig mange måter å velge ut referansepunkter og selv med de samme referansepunktene er det mulig å trekke andre forbindelseslinjer og å tegne et annet trekantnett.

Hauptvermutungen forteller oss at uansett utgangspunkt, så kan vi finne en felles forfining av to trianguleringer av samme rom.

For plane områder er det lett å gjøre dette i praksis. Vi legger de to trianguleringene oppå hverandre, slik at vi får med alle referansepunkter og alle forbindelseslinjer i begge oppdelin-

gene. Det er mulig at vi på denne måten finner nye skjæringspunkter mellom linjer som ikke allerede er referansepunkter, verken i den ene eller andre trianguleringen. I så fall introduserer vi et nytt referansepunkt i skjæringspunktet. Det er også tenkelig at det dukker opp firkanter eller fem- eller endog seks-kanter i det nye mønsteret. I så fall må vi introdusere både referansepunkter og forbindelseslinjer inne i mangekantene for å dele de opp i trekkanter.

Det er viktig å merke seg at Hauptvermutungen uttaler seg om alle mulige tilfeller av par av trianguleringer. Det betyr at for å motbevise hypotesen, så trengs bare ett eneste eksempel hvor hypotesene feiler. Det var det Milnor gjorde i sin artikkel fra 1961.

Milnors teorem

Let L_q denote the 3-dimensional lens manifold of type $(7, q)$, suitably triangulated, and let Δ^n denote an n -simplex. A finite simplicial complex X_q is obtained from the product $L_q \times \Delta^n$ by adjoining a cone over the boundary $L_q \times \partial\Delta^n$. The dimension of X_q is $n+3$.

Theorem 1. For $n+3 \geq 6$ the complex X_q is homeomorphic to X_2 .

Theorem 2. No finite cell subdivisions of the simplicial complex X_q is isomorphic to a cell subdivision of X_2 .

Teoremet gir et moteksempel til Hauptvermutungen.

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 74, No. 3, November, 1961
Printed in Japan

TWO COMPLEXES WHICH ARE HOMEOMORPHIC BUT COMBINATORIALLY DISTINCT

By JOHN MILNOR
(Received March 14, 1961)

Let L_q denote the 3-dimensional lens manifold of type $(7, q)$, suitably triangulated (see § 1), and let σ^n denote an n -simplex. A finite simplicial complex X_q is obtained from the product $L_q \times \sigma^n$ by adjoining a cone over the boundary $L_q \times \partial\sigma^n$. The dimension of X_q is $n+3$.

THEOREM 1. For $n+3 \geq 6$ the complex X_q is homeomorphic to X_2 .

THEOREM 2. No finite cell subdivision of the simplicial complex X_q is isomorphic to a cell subdivision of X_2 . In particular there is no piecewise linear homeomorphism from X_q to X_2 .

The proof of Theorem 1 will be based on a recent result of B. Mazur. For the special case $n=3$ (which is somewhat more difficult) the proof will make use of theorems of A. Haefliger and J. Stallings.

The proof of Theorem 2 will be based on the concept of "torsion" as defined by Reidemeister, Franz, and de Rham.

These two theorems show that the Hauptvermutungen for simplicial complexes of dimension ≥ 6 is false. On the other hand Papakyriakopoulos [10] has proved the Hauptvermutungen for complexes of dimension ≤ 2 .

The Hauptvermutungen for manifolds remains open. However Moise [8] has proved the Hauptvermutungen for manifolds of dimension ≤ 3 ; and Smale [13] has proved it for triangulations of the sphere S^n , $n \neq 4, 5, 7$, which look locally like the usual triangulation. A weak form of the Hauptvermutungen for cells and spheres has been proved by Gluck [4].

As bi-products of the argument, two other curious phenomena appear.

The symbols

$$S^{n-1} \subset D^n \subset R^n$$

will always denote the unit sphere bounding the unit disk in euclidean n -space.

THEOREM 3. The manifold-with-boundary $L_q \times D^n$ is not diffeomorphic to $L_2 \times D^n$. However the interiors of these two manifolds are diffeomorphic.

¹ The author wishes to thank the Sloan Foundation for its support.

² See, for example, Alexandroff and Hopf [1, p. 152]. I do not know who originated the term "Hauptvermutungen". The problem was clearly formulated by Tietze [18, pp. 13-14] in 1908. See also Steinhaus [15, p. 23].